ISSN：3105-0085
EISSN：3105-0093

考虑潜在偏好不确定性与方向容忍的区间意见鲁棒最小成本共识研究

何勤艳

贵州财经大学，贵州 贵阳 550025

摘　要：在区间意见协商中，初始意见覆盖的范围并不等于参与者愿意无偿接受的调整范围。若偏好系数也由协调者选定，补偿预算可能被低估；而直接按区间长度的倒数赋权，则可能使区间的权重过大。本文将潜在偏好视为给定区间内的未知参数，分别设定上调和下调容忍度，并采用平滑权重，据此建立完全共识与软共识的鲁棒最小成本模型。研究表明，最坏情形成本可在偏好区间端点取得，两类模型均可转化为线性规划；而各方鲁棒容忍区间存在交集是零成本完全共识的条件。污染减排协商算例表明，软共识所需补偿预算低于完全共识，而平滑赋权则减轻了短区间权重集中。

关键词：区间意见；潜在偏好；方向容忍；非对称成本；软共识；鲁棒优化

DOI：10.64649/yh.shygl.issn3105-0085.202610020

0 引言

群体达成共识通常需要协调者弥合参与者之间的意见分歧，而意见调整也会产生相应的补偿成本。在污染减排协商中，参与者可能因信息不足而只能提供区间意见，且对目标上调与下调的接受程度也可能不同。因此，仅以最终意见是否一致来评价协商结果，难以准确衡量达成共识所需的补偿预算。

现有最小成本共识模型已将意见调整与协调支出联系起来[1]，并逐步扩展至区间意见[2]、非对称调整成本[3][4]和软共识[5][6]等情形。然而，在计算区间意见的调整成本时，仍需回答两个问题：谁来确定参与者的潜在偏好，以及多大幅度的调整可以不予补偿。如果协调者同时选定偏好系数和共识意见，模型可能选择成本较低的偏好位置，从而低估极端偏好情形下的预算补偿。此外，初始区间反映的是意见表达中的不确定性，无成本容忍范围反映的则是参与者愿意接受调整的幅度。如果模型混淆这两者，就可能将本应补偿的调整误计为零成本；如果直接按照区间长度的倒数赋权，极窄区间还可能获得过高权重。

针对上述问题，本文借鉴鲁棒优化理论[7]，将潜在偏好定义为指定范围内的未知参数，分别设置正反两个方向的容忍度，并引入平滑权重机制来调节区间长度的影响。本研究分别构建完全共识与软共识模型，探讨最坏情形成本的端点性质、零成本共识条件和阈值性质，并结合污染减排协商的算例，对不同共识要求下的预算进行对比分析。

1 问题描述与基本设定

1.1 区间意见与潜在偏好

设决策者集合为 $D=\{d_1,d_2,\cdots d_m\}$，其中 $m\geqslant 2$。第 i 位决策者 d_i 给出初始区间意见 $o_i=\left[o_i^l,o_i^r\right]$，且 $0<o_i^l<o_i^r$。潜在意见为 $o_i(\ _i)=o_i^l+\ _i\Delta_i$，$\Delta_i=o_i^r-o_i^l$。偏好系数 $\alpha_i=\left[\underline{\alpha_i},\overline{\alpha_i}\right]\subseteq[0,1]$，调整方案须在具体取值揭示前确定。潜在意见的下、上界为

$$\underline{o_i}=o_i^l+\underline{\alpha_i}\Delta_i,\overline{o_i}=o_i^l+\overline{\alpha_i}\Delta_i \quad (1)$$

各偏好系数的不确定范围取笛卡尔积，不另设参数关联。初始意见区间描述表达过程中的不确定性，不限制经补偿后可达到的目标意见。

1.2 方向容忍与非对称成本

设 $\overline{\tau_i}\geq 0$ 和 $\overline{\tau_i}\geq 0$ 分别为上调和下调的无成本容忍度，$\overline{c_i}>0$ 和 $\underline{c_i}>0$ 为对应的单位成本。给定潜在意见，只有超出容忍范围的调整量需要补偿；两个方向的容忍度和单位成本可以不同。

$$c_i(x,\alpha_i)=\overline{c_i}\max\left\{x-o_i^l-\alpha_i\Delta_i-\overline{\tau_i},0\right\}+\underline{c_i}\max\left\{o_i^l+\alpha_i\Delta_i-x-\underline{\tau_i},0\right\} \quad (2)$$

1.3 区间长度权重

当其他重要性因素相同，且用区间长度表示意见的不确定程度时，取平滑权重

$$w_i=\frac{(1+\kappa\Delta_i)^{-1}}{\sum_{i=1}^{m}(1+\kappa\Delta_i)^{-1}},\kappa\geq 0 \quad (3)$$

$k=0$ 时各决策者等权。随着 k 增大，短区间的相对权重上升，并逐渐趋近区间长度倒数赋权。有限的 k 能减轻极窄区间造成的权重集中，但不能保证结果对 k 稳定；区间短也不等于判断准确。

ISSN：3105-0085
EISSN：3105-0093

2 最坏情形成本及性质

2.1 端点性质

协调者按偏好范围内的最高补偿需求配置预算。给定目标意见 x，决策者 d_i 的最坏情形成本为

$$C_i(x)=\max_{\alpha_i\in[\underline{\alpha_i},\overline{\alpha_i}]} c_i(x,\alpha_i)=\max\left\{\overline{c_i}\left(x-\underline{o_i}-\overline{\tau_i}\right),\underline{c_i}\left(\overline{o_i}-x-\underline{\tau_i}\right),0\right\} \quad (4)$$

固定 x 后，调整成本是 a_i 的分段线性凸函数，最大值可在偏好区间端点取得：上调成本对应最低潜在意见，下调成本对应最高潜在意见。由于不确定集是独立区间的笛卡尔积，总成本的最坏情形等于各决策者最坏情形成本之和。这是覆盖给定偏好范围的预算上界，不代表必然发生的实际支出。

2.2 零成本完全共识

要使所有决策者在同一目标意见下都无须补偿，各人的鲁棒无成本可接受区间必须有公共交集，即

$$\max_{i\in M}\left\{\overline{o_i}-\underline{\tau_i}\right\}\le\min_{i\in M}\left\{\underline{o_i}-\overline{\tau_i}\right\} \quad (5)$$

因此，即便潜在意见区间重叠，仍须核验两个方向的容忍度。

2.3 阈值性质

软共识用阈值 λ 约束个人意见与群体意见的相对偏差。固定权重和其他参数时，阈值越高，可行域越小，因此最优成本 $V(\lambda)$ 单调不减；成本不一定严格上升，群体意见也不一定随阈值单调变化。

3 基于鲁棒优化的最小成本共识方法

3.1 完全共识模型

以所有决策者的最坏情形成本之和为目标。令 Z_i 为决策者 d_i 的成本上界，完全共识可写为以下线性规划：

$$\min_{x,z}\phi=\sum_{i=1}^{m}z_i \quad s.t.\begin{cases}z_i\ge\overline{c_i}\left(x-\underline{o_i}-\overline{\tau_i}\right)\\ z_i\ge\underline{c_i}\left(\overline{o_i}-x-\underline{\tau_i}\right)\\ z_i\ge 0,i\in M,x\ge 0\end{cases} \quad (6)$$

原问题要求 $x>0$。求解时采用闭约束 $x\geqslant 0$ 不改变最优值，并存在正的最优共识意见。

3.2 软共识模型

令 x_i 为决策者 d_i 调整后的意见，x 为按公式 (3) 加权的群体意见。相对偏差的共识程度定义为

$$f_i(x_i,x)=\max\left\{0,1-\frac{|x_i-x|}{x}\right\} \quad (7)$$

给定 $0<\lambda\le 1$，约束 $f_i(x_i,x)\ge\lambda$ 等价于

$$\lambda x\le x_i\le(2-\lambda)x,x=\sum_{i=1}^{m}w_ix_i,0<\lambda\le 1 \quad (8)$$

在公式 (6) 的两项成本约束中以 x_i 代替共同意见 x，再加入公式 (8) 及非负约束，即得软共识的线性规划。λ 1 时各 $x_i=x$，退化为完全共识。

3.3 求解步骤

先收集初始意见区间、两个方向的单位成本和容忍度，确定潜在偏好范围；再选择 k 计算权重，按共识要求求解模型；最后改变 λ、k 和偏好范围，检查预算与意见的敏感性。偏好范围可依据调查、历史记录或专家判断确定。

4 案例分析

4.1 参数设置与权重

以政府与污染企业的减排协商为背景[2][3][4]，地方政府负责协调，电厂 d_1、钢铁厂 d_2、石化厂 d_3 和水泥厂 d_4 参与协商。减排区间依次为 [14.37] 、[22,30]、[64,153] 和 [8,61] 千吨。上调与下调的单位成本依次为 [5,3] 、[4,2]、[8,6] 和 [2,3] 万元／千吨。潜在偏好范围与方向容忍度见表 1。

表 1 潜在偏好与方向容忍参数

企业	$[\underline{\alpha_i},\overline{\alpha_i}]$	$\overline{\tau_i}$	$\underline{\tau_i}$
d_1	[0.60,0.80]	3	2
d_2	[0.40,0.60]	1.5	1
d_3	[0.25,0.40]	6	8
d_4	[0.40,0.60]	5	4

完全共识的最优意见为 30.80 千吨，最坏情形补偿预算为 396.20 万元。取 $\lambda=0.8$ 时，一组软共识最优解的群体意见为 31.2070 千吨，四位决策者的调整后意见为（30.8000，26.7000，37.4484，35.1600）千吨，预算为 326.8299 万元，比完全共识减少 69.3701 万元，约 17.51%。石化厂保留较高意见，减少了高成本方向的下调。

4.2 灵敏度与模型比较

固定 k=0.02，改变共识阈值，结果见表 2。

ISSN：3105-0085
EISSN：3105-0093

表 2 共识阈值变化对模型结果的影响

共识阈值 λ	群体意见 x^*（千吨）	补偿预算 ϕ^*（万元）
0.60	36.4891	276.8612
0.70	31.7903	303.5560
0.80	31.2070	326.8299
0.90	31.9636	352.7782
1.00	30.8000	396.2000

从结果可以看出，当 $\lambda=0.8$ 时，采用区间长度倒数赋权的预算为 331.4811 万元；而采用平滑赋权时预算降低到 326.8299 万元，最短区间决策者的权重也由 0.6295 降低到 0.3604。另外，如果将偏好区间中点视为已知值处理，名义模型预算只有 268.8043 万元，比鲁棒模型低了 58.0256 万元。

赋权方式不同带来的成本变化取决于本算例的参数设置，不能因此断言平滑赋权在任何情况下都能节约成本；而鲁棒模型与名义模型的差值本质上是为覆盖所有潜在偏好范围而支付的额外预算，并不是同一套方案在现实应用中产生的真实损失。

5 结论

本文将初始意见区间与无成本容忍范围加以区分，并将潜在偏好设定为未知参数。在这一设定下，最坏情成本可在偏好区间的端点处取得，因此完全共识模型和软共识模型均可转化为线性规划问题。研究结果表明，只有初始区间与无成本容忍范围存在公共交集，零成本完全共识才可能实现；随着软共识阈值提高，最优成本单调不减。

污染减排协商算例表明，允许参与者保留一定程度的意见差异，可以降低补偿预算；采用平滑权重机制，则有助于缓解及窄区间造成的权重集中。上述结果以单位成本和容忍度保持不变、偏好参数相互独立为前提。未来还需要结合企业减排能力、偏好的动态变化以及多轮协商反馈，检验这些假设对模型结果的影响。

参考文献：

[1]Ben-Arieh D, Easton T. Multi-criteria group consensus under linear cost opinion elasticity[J]. Decision Support Systems, 2007, 43(3): 713-721.

[2]Gong Z W, Xu X X, Zhang H H, et al. The consensus models with interval preference opinions and their economic interpretation[J]. Omega, 2015, 55: 81-90.

[3]Cheng D, Zhou Z L, Cheng F X, et al. Modeling the minimum cost consensus problem in an asymmetric costs context[J]. European Journal of Operational Research, 2018, 270(3): 1122-1137.

[4] 程栋 , 张静阳 , 袁宇翔 , 等 . 基于区间意见的非对称最小成本共识决策问题研究 [J]. 运筹与管理 , 2022, 31(5): 43-48.

[5]Kacprzyk J, Fedrizzi M. A "soft" measure of consensus in the setting of partial (fuzzy) preferences[J]. European Journal of Operational Research, 1988, 34(3): 316-325.

[6]Zhang H H, Kou G, Peng Y. Soft consensus cost models for group decision making and economic interpretations[J]. European Journal of Operational Research, 2019, 277(3): 964-980.

[7]Ben-Tal A, Nemirovski A. Robust solutions of uncertain linear programs[J]. Operations Research Letters, 1999, 25(1): 1-13. DOI: 10.1016/S0167-6377(99)00016-4.

作者简介：何勤艳（2000.09—），女，汉族，贵州遵义人，硕士研究生在读，研究方向：群体决策与共识建模。