

微分几何定理条件辨析的教学设计

贺 杰

北京化工大学数理学院, 北京 100029

摘 要: 理解微分几何定理, 需要说明条件在哪里使用, 以及改变条件后结论是否成立。围绕零挠率与平面曲线、正交坐标与曲率线、测地线与最短路三个案例, 设计条件辨析、反例构造和命题修正任务, 分别讨论几何量的定义域、命题与逆命题、局部性质与整体结论。各案例均给出反例的构造依据和修正命题的证明, 并配以分层提示、迁移练习和作业评价标准。教学设计将学生对条件的解释与具体推理相联系, 使定理的适用范围成为可以讨论、验证和评价的学习内容。

关键词: 微分几何; 定理条件; 反例构造; 命题修正

DOI: 10.64649/yh.jydk.issn3080-2660.202610034

0 引言

“挠率为零的曲线是平面曲线”、“两族曲率线相互正交”、“测地线是最短路”, 这些便于记忆的说法, 省略了各自成立的条件。学生即使能够复述定理, 也未必能说明挠率在哪些点有定义、主方向为何正交, 以及测地线段在何种范围内最短。定理教学不能止于结论和证明的复现, 还需引导学生说明每项条件承担的作用, 并据此判断定理能否用于新的情境。

已有研究为此提供了启发。吴亚东^[1]讨论了微分几何教学中的概念理解、计算和图形思考; 张修道^[2]介绍了反例在数学分析教学中的应用。谷龙江等^[3]通过有理数集中的反例解释实数的连续性, 徐东荣等^[4]围绕一致连续定义的变式开展逻辑辨析。Zazkis 和 Chernoff^[5]则指出, 反例的说服力与学习者已有的例子经验有关。可见, 反例教学已有方法基础, 仍需结合课程内容说明例子如何选取、学生需要完成哪些推理。

本文选取上述三个案例, 将条件辨析安排在相关定理的学习之后。三个案例依次涉及命题是否有意义、逆命题是否成立、结论能否扩大范围, 辨析的侧重点各有不同。所用数学知识属于教材的通常内容^{[6][7]}, 本文着重说明如何据此设计任务, 使学生在核查对象、验证反例和修正命题的过程中交代判断依据。

1 条件辨析的组织方式

开展辨析之前, 先约定研究对象。例如, 讨论正则曲线的曲率条件能否删除, 反例本身仍须正则; 若构造的曲线在拼接点不正则, 就没有回答原来的问题。教师可以让学生在定理证明旁标注条件的使用位置: 某个条件保证几何量有定义, 还是用于推导一个等式, 抑或限制结论的适用范围? 这些问题比笼统地要求“注意定理条件”更容易落实。

课堂上宜先改变一个因素, 让学生独立判断, 再讨论理由。结论可能失效, 也可能仍然成立; 后一种情况同样需要证明, 不能预设每

次改变条件都应找到反例。对于失效的命题, 可以补充假设, 也可以减弱结论或缩小范围。每次讨论保留首次判断、计算草稿和最终表述, 要求学生指出修改之处, 并回到原证明, 说明哪一步失去依据、修正后怎样继续推理。

还应区分反驳与修正所需的证据。一个反例只能否定它所针对的命题, 不能据此断言原定理的每个条件都不可删除。补上某项假设后, 原反例不再适用, 也不等于新命题已获证明。学生必须回到定义或原有论证, 解释补充的条件怎样使推理成立。

2 三个案例及其教学处理

2.1 零挠率判据中的非零曲率条件

设 $\gamma: J \rightarrow \mathbb{R}^3$ 为区间 J 上的 C^3 正则曲线, 以弧长 s 为参数, 曲率 $k > 0$ 。记单位切向量、主法向量和次法向量为 T, N, B , 挠率为 τ 。由 Frenet 公式 $B' = -\tau N$, 若 $\tau \equiv 0$, 则 B 在区间上为常向量 B_0 。取定 $s_0 \in J$ 后, 有 $\langle \gamma(s) - \gamma(s_0), B_0 \rangle' = \langle T, B_0 \rangle = 0$, 故曲线包含于一个平面。

先删除弧长参数要求。由于正则曲线可以重新用弧长参数化, 上述几何结论仍成立。弧长参数方便了证明, 却不是平面性的必要前提。再考察曲率可能为零的情形。对一般参数, 挠率公式为 $\tau = \frac{\det(\gamma', \gamma'', \gamma''')}{|\gamma' \times \gamma''|^2}$ 。

其中撇号表示对 t 求导。曲率为零时, 分母为零, 通常的挠率没有定义, 不能把分子为零解释为挠率为零。因而先将问题改写为有意义的命题: 若 C^3 正则曲线满足 $\det(\gamma', \gamma'', \gamma''') \equiv 0$, 是否必为平面曲线?

反例可由两个不同平面内的曲线段拼接而成。令 $\gamma(t) = (t, t^4, 0)$, $0 \leq t < 1$,

$$\gamma(t) = (t, 0, t^4), \quad -1 < t < 0.$$

两侧在原点的前三阶导数一致, 故曲线为 C^3 ; 第一分量的导数恒为 1, 故处处正则。当时 $t > 0$, $\gamma' \times \gamma'' = (0, 0, 12t^2)$ 当 $t < 0$ 时, 该叉积为 $(0, -12t^2, 0)$ 。两侧曲率均非零, 且行列式为

零; 在原点, $\gamma'' = \gamma''' = 0$, 行列式仍为零。

整条曲线却不在同一平面内。若其包含于 $ax+by+cz=d$, 由 $\gamma(0)=0$ 得 $d=0$ 。代入 $t>0$ 的部分, $at+bt^4 \equiv 0$ 推出 $a=b=0$; 代入 $t<0$ 的部分又得 $c=0$, 与平面法向量非零矛盾。几何上, 右侧的次法向量为 $(0,0,1)$, 左侧为 $(0,-1,0)$; 曲率为零的拼接点, 使两侧所在平面可以不同。

由此得到两种修正: 补充曲率处处非零的条件, 可以恢复整条曲线的平面性; 若允许曲率为零, 则同一证明只能保证, 在集合 $\{t: \kappa(t) > 0\}$ 的每个连通分支上, 曲线分别位于某个平面内, 不能断定各平面相同。

教学时可先提示“在两个平面内拼接”, 让学生选择函数, 再核查可微阶数。若把 t^4 换成 t^2 , 两侧二阶导数便不能接合, 不满足 C^3 要求。两种构造的差别应由学生逐项验证: 曲线不在同一平面内, 并不足以反驳命题; 它还须满足正则性、可微性和行列式恒为零等假设。

也可以要求学生找出更多符合要求的幂次。将 t^4 换 t^2 成, 整数 $m \geq 4$ 时仍可得到同类反例。这样, 学生需要解释选择函数的理由, 而不只是记住给定的参数式。

2.2 正交坐标与曲率线坐标的区别

设 $r(u,v)$ 为无脐点的正则曲面片, 取单位法向量 n , 形算子为 $S=-dn$ 。记第一基本形式的系数为 E,F,G , 第二基本形式的系数为 e,f,g , 其中 $F=\langle r_u, r_v \rangle$, $f=\langle r_{uv}, n \rangle = \langle Sr_u, r_v \rangle$ 。若两族坐标曲线均为曲率线, 则两个坐标方向是对应不同主曲率的特征方向, 由 S 的自伴性可得 $F=0$ 。逆命题是否成立?

反例无需寻找复杂曲面, 只需改变圆柱的坐标。取单位圆柱 $X(u,v)=(\cos u, \sin u, v)$, 作变换 $u=\frac{p+q}{\sqrt{2}}, v=\frac{-p+q}{\sqrt{2}}$ 。

在充分小的参数矩形内, $r(p,q)=X(u,v)$ 是正则曲面片。选取内法向后, 计算得 $E=G=1$, $F=1$, 而 $e=f=g=1/2$ 。于是 $Sr_p=(r_p+r_q)/2$, 不平行于 r_p ; Sr_q 也不平行于 r_q 。两族坐标曲线虽然正交, 却都不是曲率线。

正确的修正是: 在无脐点的曲面片上, 两族坐标曲线均为曲率线, 当且仅当 $F=f=0$ 。当 $F=f=0$ 时, 由第二基本形式与形算子的关系可得 $Sr_u=(e/E)r_u$, $Sr_v=(g/G)r_v$, 故两个坐标方向均为主方向。反之, 曲率线坐标给出 $F=0$, 再由 $Sr_u=k_1r_u$ 得 $f=k_1F=0$ 。这个证明也说明了两个零条件的区别: $F=0$ 保证正交, $f=0$ 在此前提下保证形算子保持坐标方向。

讨论时可把原命题与逆命题并列写出, 要求学生指出推理方向改变后缺少了什么。圆柱的形状没有改变, 正交性也没有丢失, 改变的是坐标方向与主方向的关系。计算之后应回到这一几何解释, 说明为何仅检验第一基本形式不足以判定曲率线。

无脐点条件可以留作追问。在球面上, 形算子是恒等算子的倍数, 每个切方向都是主方向; 按切向量为主方向的标准, 非正交坐标曲线同样满足要求。因而“主方向正交”的论证必须说明两个主曲率不同, 也须明确教材对脐点处曲率线的约定。

2.3 测地线最短性质的适用范围

对表面上的单位速度曲线, 测地线条件等价于其加速度没有曲面切向分量。它是一项微分条件, 不能直接保证任意长的曲线段都实现端点间距离。以单位球面的大圆为例, 取

$$\gamma(s) = (\cos s, \sin s, 0), \quad 0 \leq s \leq L,$$

其中 $\pi < L < 2\pi$ 。有 $|\gamma'| = 1$ 且 $\gamma'' = -\gamma$, 故加速度沿球面法向, γ 是长度为 L 的测地线段。另一段大圆弧 $\eta(t) = (\cos t, -\sin t, 0)$, $0 \leq t \leq 2\pi - L$, 具有相同端点, 长度却为 $2\pi - L < L$ 。这就否定了“任意测地线段都是最短路”的说法。

修正时不宜只补上“局部”二字。一般曲面的准确结论是: 测地线上每一点附近, 都有足够短的子段实现其端点间的曲面内距离^[7]。单位球面上还能作出更细的判断: 对于 $0 < L < 2\pi$ 的大圆弧, $L < \pi$ 时为唯一最短轨迹, $L = \pi$ 时最短但不唯一, $L > \pi$ 时不最短。这里的唯一性不区分同一轨迹的重新参数化。

上述分界可从长度下界看出。固定起点 P , 对连接 P, Q 的分段光滑球面曲线 c , 令 θ 为 c 与 P 的夹角。由 $|c| = 1$, 在非极点处有 $|\theta'| \leq |c'|$, 积分并在极点处取极限, 得到曲线长度不小于 $\arccos \langle P, Q \rangle$ 。短大圆弧达到等号; 两点不对径时, 等号要求沿同一经线方向单调前进, 故最短轨迹唯一; 两点对径时, 各条大圆半圆均达到等号。

本例可用改变弧长的方式组织讨论。要求学生分别回答“是否为测地线”“是否最短”“最短路是否唯一”, 并在每次判断后给出依据。大圆不变而答案随弧长改变, 能够凸显微分条件、长度比较和唯一性是三个不同问题。

3 课堂安排与学习评价

三个案例宜分散安排在相应章节之后, 每例可用一课时讨论。先让学生独立判断并写下理由, 再回看原证明, 随后分组尝试构造和验证, 最后独立修订命题。构造环节可依学情调整时长, 但应留出时间核查反例的全部假设。课前只复习必要定义, 不提前给出反例, 以保留学生提出和检验猜想的机会。

学生基础不同, 提示也应有所区别。对构造困难的学生, 可给出分段曲线或圆柱参数式, 让其完成验证; 对已有思路的学生, 只提示拼接或坐标旋转; 对完成较快的学生, 再要求改变参数, 判断构造仍然有效的范围。共同要求是写清对象满足哪些条件、哪项结论失效, 以

及修正后的命题如何证明。

评价不宜只看最终判断。可以分别记录四方面表现：是否核查条件和定义域，是否完整验证反例，是否准确修正命题，是否解释原推理失效之处。以第一个案例为例，“原点挠率等于零”属于概念错误；知道挠率无定义却没有核查拼接处可微性，属于验证不完整；说明两侧法向量为何可以不同，才涉及原证明失效的原因。批注应指出错误所在，并要求学生补足相应论证。

首次作业与修订稿应使用同一组标准，并记录教师提供了哪些提示。若学生只能在给定参数式后完成计算，应与独立构造反例的表现分别记录；小组讨论形成的答案，也须通过个人说明核实。评价由此关注学生实际完成了哪些推理。

课后应设置未直接讲解过的任务。将圆柱坐标变换改为

$$\begin{aligned} u &= p\cos\alpha + q\sin\alpha, \\ v &= -p\sin\alpha + q\cos\alpha. \end{aligned}$$

其中 a 为常数，仍取内法向。学生可算出 $E=G=1, F=0, f=\sin\alpha\cos\alpha$ 。这些坐标始终正交，仅当 α 为 $\pi/2$ 的整数倍时才是曲率线坐标。作业须说明为何正交性不随旋转角改变，以及哪些旋转使坐标方向重新成为主方向。

另一道迁移题是：“连通正则曲面满足 $K \equiv 0$ ，是否包含于一个平面？再加 $H \equiv 0$ 呢？”

这里 K, H 分别为高斯曲率和平均曲率。圆柱否定前一命题；增加条件后，由主曲率满足看 $k_1k_2=0, k_1+k_2=0$ 得 $k_1=k_2=0$ ，故形算子为零。每个连通坐标片上的法向量为常向量，该片包含于一个平面；相交坐标片的平面相同，再由连通性得到整体结论。这道题把寻找反例和补充条件后的证明放在一起，也要求学生交代从局部到整体的理由。

实施时应保存讨论前后的个人作业，并在一至两周后安排迁移题。比较重点是学生解释条件、验证对象和修正表述的变化，以区分例子记忆与方法运用。后续研究还需报告参与人数、测试题目、评分依据与缺交情况。单班前后测受到重复练习和后续教学的影响，可以描述学习变化，但尚不足以确定这一教学安排的独立效果。

4 结语

定理条件辨析可以从本科课程中的常见对象展开。拼接曲线说明挠率的定义限制，圆柱坐标变换揭示正交性不足以确定主方向，球面大圆区分局部最短、整体最短与唯一性。三个案例都把反例验证与命题修正联系起来，要求学生每一次判断给出理由。本文提供的是教学设计及其数学依据，学习效果仍需结合实际作业和迁移表现检验。

参考文献：

- [1] 吴亚东. 本科微分几何教学的一些探索 [J]. 教育进展, 2019, 9(6): 683-687.
- [2] 张修道. 数学分析教学中反例的应用 [J]. 保山师专学报, 1996(3): 11-14, 23.
- [3] 谷龙江, 王毅, 陈亭亭, 等. 反例教学法与实数连续性 [J]. 教育进展, 2022, 12(11): 4423-4427.
- [4] 徐东荣, 莫雪妙, 卢卫君. 一致连续的逻辑语言辨析 [J]. 广西民族大学学报(自然科学版), 2017, 23(3): 50-55.
- [5] ZAZKIS R, CHERNOFF E J. What makes a counterexample exemplary?[J]. Educational Studies in Mathematics, 2008, 68: 195-208.
- [6] 彭家贵, 陈卿. 微分几何 [M]. 2 版. 北京: 高等教育出版社, 2021.
- [7] PRESSLEY A. Elementary Differential Geometry[M]. 2nd ed. London: Springer, 2010.

作者简介：贺杰（1989.10—），男，汉族，湖北红安人，理学博士，讲师，主要研究方向：几何分析。